٢-٥: خصائص مقدرات المربعات الصغرى العادية (م ص ع):

الخصائص الإحصائي التي تتميز فيها مقدرات المربعات الصغرى العادية.

تتميز المقدرات $\alpha\ \beta$ بثلاث خواص أساسية:

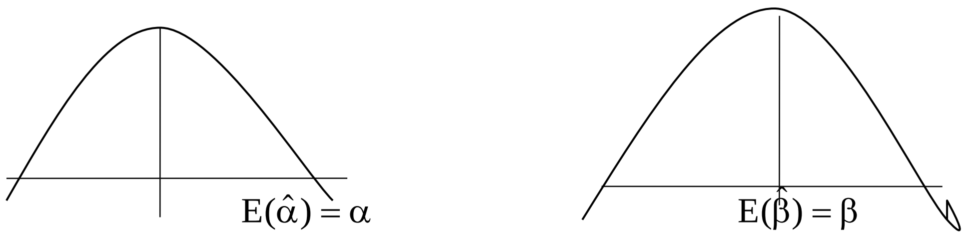
- الخطية.
- عدم التحيز
- الكفاءة

أولاً الخطية: $\hat{\alpha}$ تعتبر داله خطية للعنصر العشوائي التابع Y . أهمية هذه الخاصة أنها تعطينا درجه من البساطة في أجراء الحسابات حيث انه لحساب $\alpha\ \beta$ نستعمل المتغير التابع في صوره خطيه فقط هذه لتبسيط الحسابات.

ثانياً: عم التحيز: مقدرات (م ص ع) $\hat{\alpha}$ مقدرة غير متحيزة للمعلمة α . عدم التحيز يتطلب بأن القيمه المتوقعة لـ $\hat{\alpha}$ و التي هي قيمة المعلومة الحقيقية بمعنى آخر متوسط $\hat{\alpha} = \alpha$. إذا جمعت عينات كثيرة وفي كل عينه نحسب $\hat{\alpha}$ يتم أخذ المتوسط. ذلك المتوسط نظريا يجب أن يتساوى مع المعلمة الحقيقية. $E(\hat{\alpha}) = \alpha$ مقدرات (م ص ع) $\hat{\beta}$ مقدرة غير متحيزة للمعلمة β حيث أن $E(\hat{\beta}) = \beta$. أي أن توقع $\hat{\beta}$ يجب أن يساوي المعلم ه الحقيقية بمعنى آخر متوسط قيم $\hat{\beta}$ أو في المتوسط $\hat{\beta}$ تساوي القيمة الحقيقية للمعلمة β. هذه الأوضاع كلها نظريه بحتة في الواقع لا يكون عندنا عدد من العينات، بكون في الواقع عينه واحدة فقط وتعطينا قيمه واحدة $\hat{\alpha}$، قيمه واحدة $\hat{\beta}$ يعتمد عليها في التحليل، من الناحية النظرية نقول أن هذه المقدرات يتوقع أنها تساوي القيمة الحقيقية من الناحية الأخرى القيمة الحقيقة لا نعرفها وبالتالي هذه الخصائص خصائص نظريه بحتة. على الرسم البياني، رسم دالة احتمال $\hat{\beta}$ ، خاصية عدم التحيز تقول أن توزيع احتمال $\hat{\beta}$ يأخذ هذا الشكل يتمركز حول القيمة الحقيقية، لـ

β يعنـي أن القيمـة المتوقعـة لـ $\hat{\beta}$ تسـاوي β $E(\hat{\beta})=\beta$ وأن قيمـة β تسـاوي المعلمـة الحقيقيـة

ونفس التحليل ينطبق على α.



تباين المقدرات: تباين اي قيمة تتوزع حول وسط معين هو معدل تشتت هذه القيم عن الوسط

ويكون القانون الخاص بتباين مقدرة القاطع:

$$V(\hat{\alpha})=E\{\hat{\alpha}-E(\hat{\alpha})\}^2$$

بإجراء بعض الخطوات يمكن إن نبرهن إن تباين $\hat{\alpha}$ يساوي

$$V(\hat{\alpha})=\frac{\sigma^2\sum X^2}{n\sum x^2}$$

من المعادلـة نلاحظ إن تبـاين $\hat{\alpha}$ تعتمـد علـى تبـاين u فـإذا زاد تبـاين u توقـع زيـادة تبـاين $\hat{\alpha}$

لان هناك علاقة طرديه بين تباين $\hat{\alpha}$ وتباين u . وتوجد صيغه أخرى لتباين $\hat{\alpha}$ علـى

انه يساوي :

$$V(\hat{\alpha})=\sigma^2\{\frac{1}{n}+\frac{\overline{X}^2}{\sum x^2}\}$$

اما القانون الخاص بتباين $\hat{\beta}$:

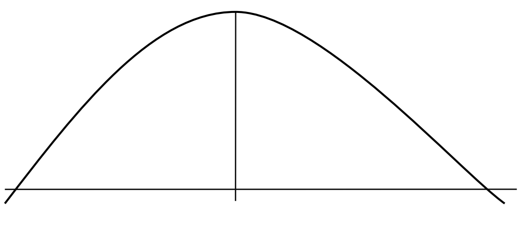
$$V(\hat{\beta})=\{\hat{\beta}-E(\hat{\beta})\}^2$$

يمكن إن نثبت إن التباين الخاص بـ $\hat{\beta}$ يساوي $V(\hat{\beta})=\dfrac{\sigma^2}{\sum x^2}$

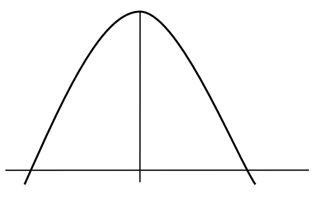
ومن المعادلة نلاحظ إن تباين $\hat{\beta}$ يعتمد طرديا على تباين u وعكسيا على مجموع مربعات انحرافات المتغير المستقل، فكلما ازدادت درجة انتشار المتغير المستقل (آي بيانات X مختلفة كثيرا عن بعضها) نتوقع إن يزيد المكون الموجود في المقام وبالتالي ينخفض تباين $\hat{\beta}$ مما يشعر إلى دقة التقديرات.

ثالثاً: أقل تباين:

الخاصية الثالثة لمقدرات م ص ع تمتلك آدني تباين هذه الخاصية لها أهمية بالغة في الاقتصاد القياسي لان آدني تباين يعتبر مؤشر إلى دقة القياسات، آدني تباين يعتبر مؤشر إلى دقة القياسات، آدني تباين يعني أعلى دقة من ناحية القياسات. هناك علاقة عكسية بين التباين ودقة القياسات كلما زاد التباين كلما انخفضت دقة القياسات وكلما قل ارتفعت دقة القياسات. لأن مقدرات م ص ع $\hat{\beta}$ $\hat{\alpha}$ تلك المقدرات تمتلك آدني تباين نعني مقارنه بمقدرات أخرى تقاس بطريقه مختلفة عن م ص ع فان مقدرات م ص ع تمتلك آدني تباين إي تتحلى بأعلى دقه. نفترض إن هناك مقدرات لـ $\beta\ \alpha$ تحصل عليها بطريقه مختلفة ونفترض إن المقدرات الأخرى α'', β'' ا ذا افترضنا أن تلك المقدرتين خطيه وغير متحيزة سيكون الاختلاف في خاصية أن مقدرات م ص ع $\hat{\beta}$ $\hat{\alpha}$ تمتلك أعلى دقة.



(٢)



(١)

$$E(\beta'') = \beta \qquad\qquad E(\hat{\beta}) = \beta$$

$$V(\hat{\beta}) < V(\beta'')$$

في الحالة (١) استخدمت مقدرات م ص ع . في الحالة الثانية (٢) مقدرات أخرى غير م ص ع ، فـي الشـكل التوزيـع الاحتمـالي لقيمـة المقـدرات β'', $\hat{\beta}$. فـي (١) يتبـين ان التبـاين قليل، درجة الانتشار لـ $\hat{\beta}$ اقل وبالتالي تتمركز قيم $\hat{\beta}$ حول القيمة الحقيقية وفي الشكل (٢) قد نحصل على قيم حول β لكنها بعيده عن المعلمة الحقيقية. من الشكل إن احتمال الحصول على $\hat{\beta}$ أقرب للمعلمة الحقيقية من β'', وبالتالي درجة احتمال العثور على $\hat{\beta}$ أقرب مما سواها، هذا ما يقصد بخاصية أدنى تباين. من النتائج التي توصلنا أليها عن مقدرات م ص ع يمكن أن نقول أن شـــكل التوزيع الاحتمالي الخاص بالمقدرات $\hat{\alpha}$ $\hat{\beta}$

$$\hat{\alpha} \sim N\left[\alpha, \sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum x^2}\right)\right], \quad \hat{\beta} \sim N\left[\beta, \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right]$$

من المعادلتين يتبين انه :

- كلما زاد التباين σ^2 كلما زاد تباين المقدرات $\hat{\alpha}$ $\hat{\beta}$.
- كلما كان انتشار قيم X اكبر كلما قل تباين $\hat{\alpha}$ $\hat{\beta}$.